18-10451@usb.ve Carlo M. Herrera Di Giacinto

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

RESUMEN TEÓRICO MATEMÁTICAS III (MA-1116)
($2^{do} PARCIAL$)

Prefacio

La presente guía ha sido creada con el fin de facilitarles a los estudiantes de la Universidad Simón Bolívar un resumen teórico de los temas principales referentes al Álgebra Lineal ajustada al programa vigente del curso de Matemáticas III (MA-1116), tanto en lo concerniente al orden de los tópicos como a la profundidad con que estos son tratados. Sin embargo, por la forma en que están presentados los diversos temas, esta obra también puede ser de interés para estudiantes de otras instituciones universitarias que requieran adquirir nociones básicas del Álgebra Lineal.

Extiendo mis agradecimientos al profesor **Jorge Sánchez Rivero (Galipán)** por transmitirme la pasión por este curso y por el apoyo durante el proceso de creación de esta guía, tanto por la información acá expuesta (extraída de sus clases) como por la revisión del material.

Agradecimientos a **GECO USB**, agrupación estudiantil de la que soy miembro, por ayudarme a crear y distribuir este material y por guiarme con las dudas que surgieron durante el proceso de digitalización.

Agradecimientos especiales a **Santiago Finamore, Asxel Ramírez, Ka Man Fung, Oscar González, Juan Cazaubon y Jose Carlos Contreras** compañeros del curso y amigos que me han ayudado a compilar la información y a crear el formato de la guía.

Los siguientes comentarios (extraídos del libro "Álgebra lineal y sus aplicaciones" de David C. Lay) ofrecen algunos consejos prácticos e información para ayudarle a dominar el material y disfrutar del curso.

En álgebra lineal, los *conceptos* son tan importantes como los *cálculos.* Más adelante en su carrera, las computadoras harán los cálculos, pero usted tendrá que elegir cuáles son pertinentes, saber interpretar los resultados, y después explicar los resultados a otras personas. Por esta razón, muchos ejercicios le piden que explique o justifique sus cálculos. Con frecuencia se solicita una explicación por escrito como parte de la respuesta. Debe evitar la tentación de consultar las respuestas antes de haber tratado de escribir la solución. De lo contrario, es probable que crea que entiende algo cuando en realidad no es así.

Para dominar los conceptos de álgebra lineal, tendrá que leer y releer el texto con cuidado. Los nuevos términos aparecen en negritas, a veces dentro de un recuadro de definición.

En un sentido práctico, el álgebra lineal es un lenguaje. Usted tiene que aprender este lenguaje de la misma manera que un idioma extranjero, esto es, con el trabajo diario. ***¡Mantenerse al día con el curso le ahorrará mucho tiempo y angustia!***

Esta guía fue preparada, organizada y digitalizada en LaTeX por Carlo Herrera. Cualquier error se agradece notificarlo al autor.

I. Vectores en el plano y en el espacio. Proyección. Producto escalar. Producto vectorial.

Recordemos que un vector:

- En el espacio bidimensional (en el plano) es un par ordenado (a,b), $\mathbb{R}^2$
- En el espacio tridimensional (en el espacio) es una terna ordenada (a,b,c), $\mathbb{R}^3$

Δ Suma y multiplicación por un escalar de vectores.

La suma de vectores se hace componente a componente y la multiplicación por un escalar "también". Es decir:

$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$

$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d,\ b + e,\ c + f)$

Sea k un escalar,

$k(a, b) = (ka,\ kb)$

$k(a, b, c) = (ka,\ kb,\ kc)$

1. Definiciones.

1.1. **Vector cero:** El vector cero, $\vec{0}$, está dado por:

$$\vec{0} = (0, 0) \text{ en } \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{0} = (0, 0, 0) \text{ en } \mathbb{R}^3$$

1.2. **Producto escalar:** El producto escalar (o producto punto o interno) de dos vectores $\vec{u}\ (a_1, a_2)$, $\vec{v}\ (b_1, b_2)$ es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

En general
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

1.3. **Norma de un vector:** La norma o magnitud de un vector $\vec{u}$, $||\vec{u}||$, está dada por

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

1.4. **Vector unitario:** Si la norma o magnitud de un vector $\vec{v}$ es igual a 1 ($||\vec{v}|| = 1$), decimos que el vector es unitario.

1.5. **Vectores iguales:** Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud, dirección y sentido.

1.6. **Vectores perpendiculares:** Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ distintos de cero son perpendiculares (u ortogonales) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

1.7. **Vectores paralelos:** Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ distintos de cero son paralelos ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) si:

i) El ángulo entre ellos es cero o π.

ii) Tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

iii) $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, para algún escalar α.

1.8. **Proyección de un vector sobre otro:** Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \vee \mathbb{R}^3$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, está dada por:

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\ \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\ \vec{v}$$

1.9. **Producto vectorial:** Sean $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ y sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial (cruz o exterior) de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, denotado $\vec{a} \times \vec{b}$, es un nuevo vector dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Observación: **No es exactamente un determinante**, pues $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ no son números, pero es una regla mnemotécnica para el producto

2. Teoremas.

2.1. Sea φ el ángulo entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (n=2 $\vee$ n=3) entonces:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\varphi}$$

2.2. Dos vectores distintos de cero $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (n=2 $\vee$ n=3) son perpendiculares si y sólo si:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

2.3. Sea $\vec{v}$ un vector distinto de cero. Entonces, para cualquier otro vector $\vec{u}$, el vector

$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\ \vec{v} = \vec{u} - Proy_{\vec{v}}\ \vec{u}} \quad \text{es ortogonal a } \vec{v}.$$

2.4. Sea $\vec{v} \neq 0$, en $\mathbb{R}^n$, entonces el vector $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ es unitario $\left(\left\| \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\| = 1 \right)$

2.5. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ distintos de cero y sea φ el ángulo entre ellos, entonces:

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\varphi}$$

2.6. **Corolario 1:** Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ son vectores distintos de cero, entonces:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}\ \ (|\vec{u} \times \vec{v}| = 0)$$

3. Propiedades.

3.1. **Vectores:** Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (en particular, $n = 2 \vee n = 3$) y sean α, β escalares.

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$

ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

iii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

iv) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

v) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

vi) $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$

vii) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

viii) $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

3.2. **Producto escalar:** Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (en particular, $n = 2 \vee n = 3$), entonces:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3) $\varphi(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\varphi\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\varphi\vec{v})$

4) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0, \quad \text{si} \quad \vec{u} \neq \vec{0}$

5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

6) 5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ ó $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

3.3. **Producto vectorial:** Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ y sea α un escalar.

i) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

ii) $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$

iii) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

iv) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

v) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

vi) $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$

vii) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

viii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (Triple producto escalar)

ix) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}$ (Triple producto vectorial)

II. Rectas y planos en el espacio ($\mathbb{R}^3$).

1. Definiciones.

1.1. **Ecuación vectorial de la recta**: Sean:

Sean $\mathbf{P}(x_0, y_0, z_0)$ un punto (dado) en la recta $\mathcal{L}$ que buscamos; $\mathbf{Q}(x,\ y,\ z)$ un punto genérico sobre $\mathcal{L}$ y $\vec{d} = (a,\ b,\ c)$ el vector director o dirección de la recta, la ecuación vectorial de la recta viene dada por:

$\boxed{\overline{PQ} = \lambda\vec{d}}$, con λ un escalar que llamaremos parámetro.

1.2. **Ecuación paramétrica de la recta**:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}}$$

1.3. **Ecuaciones simétricas de la recta**:

$$\lambda = \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

1.4. Si conocemos dos puntos sobre $\mathcal{L}$ (P y R), la dirección viene dada por $\overline{PR}$. Luego, con P (o R) y $\vec{d} = \overline{PR}$ aplicamos el procedimiento anterior para hallar cualquiera de las ecuaciones de la recta.

1.5. **Rectas perpendiculares y paralelas:** Dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ serán perpendiculares o paralelas si sus vectores directores lo son.

1.6. **Planos en el espacio ($\mathbb{R}^3$):** Sea P un punto en $\mathbb{R}^3$ y sea $\vec{n}$ un vector distinto de cero, entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overline{PQ} \cdot \vec{n} = 0$ constituyen un plano (π) en $\mathbb{R}^3$.

1.7. **Ecuación punto-normal del plano**: Sean **P** $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ un punto dado, **Q** $(x,\ y,\ z)$ un punto genérico en π y $\vec{n}\ (a,\ b,\ c)$ el vector normal al plano π, entonces tenemos que

$$\overline{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \quad \longrightarrow \quad (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \cdot (a,\ b,\ c) = 0$$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

1.8. **Ecuación cartesiana del plano**:

$$\boxed{ax + by + cz = d} \quad ; \text{ con } d = \overline{OP} \cdot \vec{n} = (ax_0 + by_0 + cz_0)$$

1.9. Si tenemos tres puntos (P, R y S) en el plano, el vector normal viene dado por $\vec{n} = \overline{PR} \times \overline{PS}$. Luego, con P (o R o S) y $\vec{n}$, hacemos el procedimiento anterior y hallamos la ecuación del plano π.

1.10. **Planos perpendiculares y paralelos:** Dos planos π_1 y π_2 serán perpendiculares o paralelos si sus vectores normales lo son.

III. Espacios y subespacios vectoriales.

1. Definiciones.

1.1 **Espacio vectorial:** Un espacio vectorial (real) V es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones binarias denominadas suma y multiplicación por un escalar y que satisfacen los siguientes axiomas:

i) Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$, entonces $\vec{x} + \vec{y} \in V$. *(Cerradura bajo la suma)*

ii) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$. *(Asociatividad de la suma)*

iii) $\exists\, \vec{0} \in V$, tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \quad \forall\, \vec{x} \in V$. *(Existencia del elemento neutro aditivo)*

iv) Para cada $\vec{x} \in V$, existe un $-\vec{x}$, tal que

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}. \quad \textit{(Existencia del elemento opuesto)}$$

v) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V$. *(Conmutatividad de la suma)*

vi) Si α es un escalar y $\vec{x} \in V$, entonces $\alpha\vec{x} \in V$. *(Cerradura bajo la multiplicación por un escalar)*

vii) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V$. *(Ley distributiva I)*

viii) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}, \quad \forall\, \vec{x} \in V$. *(Ley distributiva II)*

ix) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}, \quad \forall\, \vec{x} \in V$ y con α, β escalares.

x) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \quad \forall\, \vec{x} \in V$.

1.2. **Subespacio vectorial:** Decimos que H es subespacio vectorial de V, denotado por $H \leq V$, si H es un subconjunto no vacío de V y H es un espacio vectorial con la suma y la multiplicación por un escalar definidas para V.

1.3. **Subespacio trivial y Subespacios propios:** Para cualquier espacio vectorial V, el subconjunto $\left\{\vec{0}\right\}$ es un subespacio de V, denominado subespacio trivial. Para cada espacio vectorial V, V es un subespacio de sí mismo.

Los subespacios distintos de $\left\{\vec{0}\right\}$ y de V, se llaman subespacios propios.

Δ Espacios vectoriales más comunes.

- El espacio $\mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_\mathrm{n} \end{pmatrix}$, con $x_i \in \mathbb{R} \quad e \ \ i = 1, 2, ..., n$.

- El espacio $\mathbb{C}^n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$, con $c_i \in \mathbb{C}, \quad e \ i = 1, 2, ..., n$.

- El espacio $M_{mn}(\mathbb{R})$, de las matrices $m \times n$ con coeficientes (también pueden ser complejos). Si las matrices son cuadradas se denota, a veces, $M_n(\mathbb{R})$.

- El espacio P_n, de los polinomios de grado menor o igual a n.

- El espacio $C[a, b]$, de las funciones continuas en el intervalo [a,b].

2. Teoremas.

2.1. Sea V un espacio vectorial, entonces:

i) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

ii) $\vec{0} \cdot \vec{x} = \vec{0}$

iii) $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$

iv) Si $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}$, entonces $\alpha = 0 \ \vee \ \vec{x} = \vec{0}$ (o ambos).

2.2. Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V, es un subespacio de V si y sólo si se cumplen las dos reglas de cerradura:

i) Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$, entonces $\vec{x} + \vec{y} \in V$.

ii) Si α es un escalar y $\vec{x} \in V$, entonces $\alpha\vec{x} \in V$.

2.3. **Corolario 2:** Todo subespacio vectorial de un espacio vectorial V contiene al vector $\vec{0}$.

Nota: El vector $\vec{0}$ del corolario es el vector $\vec{0}$ definido para el espacio vectorial V.

2.4. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V, entonces $H_1 \bigcap H_2$ es un subespacio de V.

Observación: En general, no es cierto que si $H_1 \leq V$ y $H_2 \leq V$, entonces $H_1 \bigcup H_2 \leq V$. Esto puede o no suceder.

IV. Combinación Lineal. Espacio generado.

1. Definiciones.

1.1. **Combinación lineal**: Sean $\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, ..., \ \vec{v}_n$ vectores de un espacio vectorial V, entonces cualquier expresión de la forma $C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + ... + C_n\vec{v}_n$ donde los C_i son escalares arbitrarios, se denomina combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, ..., \ \vec{v}_n$.

1.2. **Conjunto generador**: Decimos que un conjuntos de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, ...,$ $\vec{v}_n$ de un espacio vectorial V generan a todo vector en V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de las mismas. Es decir, si para cada $\vec{v} \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = v$.

1.3. **Espacio generado**: Sean $v_1, v_2, ..., v_k$, vectores de un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es el conjunto de las combinaciones lineales de los vectores; se denota por: g en $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Es decir: g en $\{v_1, v_2, ..., v_k\} = \{v \in V \ : v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + ... + C_k v_k\}$, con C_i escalares arbitrarios; $i = 1, 2, ..., k$.

1.4. **Dependencia lineal**: Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, ...,$ $\vec{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Decimos que los vectores son <u>linealmente dependientes (LD)</u> si existen escalares C_1, $C_2, ...,$ C_n (no todos son cero) tales que: $\overline{C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + ... + C_n\vec{v}_n = \vec{0}}$.

1.5. **Independencia lineal**: Decimos que un vector es <u>linealmente independiente (LI)</u> si para la expresión $C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + ... + C_n\vec{v}_n = \vec{0}$, necesariamente $\overline{C_1 = C_2 = ... = C_n = 0}$.

2. Teoremas.

2.1. Si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_k$ son vectores de un espacio vectorial V; entonces

$$gen\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ ...,\ \vec{v}_k\} \ \leq \ V$$

<u>Observación:</u> En general, el espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no sean paralelos, es un plano que pasa por el origen.

2.2. <u>**DOS**</u> vectores de un espacio vectorial V son LD si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro.

<u>Nota</u>: este teorema **sólo aplica** si son <u>**DOS**</u> vectores.

<u>Observación:</u> De este teorema se desprende que si se tienen <u>**DOS**</u> vectores y ninguno es múltiplo escalar del otro, entonces son LI.

2.3. Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es LD siempre que $n > m$

2.4. **Corolario 3:** Un conjunto de vectores LI en $\mathbb{R}^n$ tiene a lo sumo n vectores.

2.5. Sea $A_{n\times n}$, entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si las columnas y filas de A son LI.

2.6. Cualquier conjunto de n vectores LI en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

2.7.Un conjunto de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ en un espacio vectorial V es LI si y sólo si para cada $\vec{v} \in V$, la representación $\vec{v} = C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + ... + C_n\vec{v}_n$, es única con C_i escalares.

V. Base y Dimensión. Núcleo e Imagen de una matriz.

1. Definiciones.

1.1. **Base**: Un conjunto finito de vectores $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \cdots,\ \vec{v}_n$ de un espacio vectorial V se llama base de V si:

i) $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \cdots,\ \vec{v}_n\}$ es un conjunto LI.

ii) $gen\,\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \cdots,\ \vec{v}_n\} = V$ (el conjunto $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \cdots,\ \vec{v}_n\}$ genera a V.

1.2. **Dimensión**: Si el espacio vectorial V tiene una base con un número finito de vectores, entonces la dimensión de V, denotada por $\dim V$, es el número de vectores en la base y el espacio vectorial es de dimensión finita.

De otra forma, V se denomina espacio vectorial de dimensión infinita. Si $V = \left\{\vec{0}\right\}$, decimos que V tiene dimensión cero.

1.3. **Espacio nulo**: Sea A_{mxn}, el espacio nulo (núcleo o kernel) de la matriz A se define como:

$$\boxed{N_A = KerA := \left\{\vec{x}\ \in\ \mathbb{R}^n\ :\ A\vec{x} = \vec{0}\right\}}$$

1.4. **Nulidad**: La dimensión del núcleo, $dimN_A$, se llama nulidad de A y se denota $\nu(A)$ (Nu de A). Si $N_A = \left\{\vec{0}\right\}$; entonces $\nu(A) = 0$).

1.5. **Imagen**: Sea A_{mxn}, la imagen de A, denotada *Im(A)*, se define por:

$$\boxed{Im(A) := \{\vec{y}\ \in\ \mathbb{R}^m\ :\ A\vec{x} = \vec{y}\};\ \text{para algún}\ \vec{x}\ \in\ \mathbb{R}^n}$$

1.6. **Rango**: La dimensión de la imagen, *dimIm(A)*, se llama rango de A y se denota $\rho(A)$ (rho de A).

1.7. **Espacio fila**: Sea A_{mxn} y sea $r_1,\ r_2, \cdots,\ r_m$ las filas de A, el espacio de las filas de A se define y denota por:

$$\boxed{R_A := gen\,\{r_1,\ r_2, \cdots,\ r_m\}.}$$

1.8. **Espacio columna**: Sea A_{mxn} y sea $c_1,\ c_2, \cdots,\ c_n$ las columnas de A, el espacio de las filas de A se define y denota por:

$$\boxed{C_A := gen\,\{c_1,\ c_2, \cdots,\ c_n\}.}$$

Δ Bases canónicas.

- En $\mathbb{R}^n = \{e_1,\, e_2, \cdots, e_n\}$, con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$

- En P_n, la base canónica es $\{1,\, x,\, x^2,\, \cdots,\, x^n\}$.

- En M_2, la base canónica es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. Teoremas.

2.1. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$ son bases distintas de un espacio vectorial V; entonces $m = n$.

2.2. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$ un conjunto de m vectores LI en un espacio n-dimensional V, entonces $m \leq n$.

2.3. Sea H un subespacio de un espacio vectorial de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces: $\dim H \leq \dim V$ y H es de dimensión finita.

2.4. Cualquier espacio vectorial que contiene un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita.

2.5. **Teoremazo 1:** Todo espacio vectorial tiene una base.

2.6. Sea V un espacio vectorial de dimensión n; sea $T = \{\vec{v}_1,\, \vec{v}_2, \cdots,\, \vec{v}_n\}$ un conjunto de n vectores en V.

i) Si T es LI, entonces forma una base.

ii) Si $genT = V$, entonces forma una base de V.

2.7. Sea $A_{m\times n}$

i) $N_A \leq \mathbb{R}^n$

ii) $Im(A) \leq \mathbb{R}^m$

iii) $R_A \leq \mathbb{R}^n$

iv) $C_A \leq \mathbb{R}^m$

2.8. Sea $A_{m\times n}$: $C_A = Im(A)$; más aún $\dim R_A = \dim C_A = \dim Im(A) = \rho(A)$

2.9. Si B es equivalente por filas a la matriz A, entonces:

i) $R_A = R_B$ *ii*) $\rho(A) = \rho(B)$ *iii*) $\nu(A) = \nu(B)$

2.10. El rango de una matriz es el número de pivotes en la forma escalonada de la matriz.

2.11. **Rank plus nullity theorem:** Sea $A_{m\times n}$

$$\boxed{\rho(A)+\nu(A)=n}$$

2.12. Sea $A_{n\times n}$, entonces A es invertible si y sólo si $\nu(A)=0\ \wedge\ \rho(A)=n$.

2.13. **Teorema de Rouché-Fröbenius:** Sea $A_{m\times n}$, entonces el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ es consistente si y sólo si A y la matriz ampliada $(A\,|\,\vec{b})$ tienen el mismo rango. Es decir, el sistema es consistente si y sólo si $\vec{b}\in C_A$.

VI. Cambio de Bases.

En $\mathbb{R}^2$, sean $U_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $U_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, entonces $\beta_1=\{U_1,\,U_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Es claro que para cualquier $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$; se tiene que

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x_1U_1+x_2U_2$$

El vector $\vec{x}$ está escrito en términos de la base β_1. Escribimos esto de forma compacta como

$$\boxed{[\vec{x}]_{\beta_1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}},\quad \text{a veces llamado \underline{vector de coordenadas}.}$$

Ahora consideremos los vectores $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; entonces $\beta_2=\{\vec{v}_1,\,\vec{v}_2\}$ también es una base de $\mathbb{R}^2$. (¿Por qué?)

(Dado que son dos vectores y ninguno es múltiplo escalar del otro, sabemos por teorema que son LI y como la dimensión del espacio es la misma que el número de vectores, se confirma que es una base.)

Sea $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$; existen escalares C_1 y C_2 tales que:

$$\vec{x}=C_1\vec{v}_1+C_2\vec{v}_2;\quad \text{es decir}\quad [\vec{x}]_{\beta_2}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

En general, si $\beta_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_n\}$ y $\beta_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n\}$ son bases de un espacio vectorial de dimensión n; existen escalares $b_1,\,b_2,\cdots,\,b_n$ y $c_1,\,c_2,\cdots,\,c_n$ tales que

$$[\vec{x}]_{\beta_2}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdot\\b_n\end{pmatrix}\qquad\wedge\qquad[\vec{x}]_{\beta_1}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\cdot\\c_n\end{pmatrix}$$

Para cada j, existen escalares a_{ij}, con $i = 1,\ 2, \cdots,\ n$ tal que

$$\vec{u}_{ij} = a_{1j}\vec{v}_1 + a_{2j}\vec{v}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{v}_n \qquad \text{o} \qquad [\vec{u}_j]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

1. Definiciones.

1.1. **Matriz de Transición:** La matriz $A_{n\times n}$ cuyas columnas estan dadas por (1) se llama matriz de transición de la base β_1 a la base β_2.

2. Teoremas.

2.1. Para todo $\vec{x} \in V$,

$$\boxed{[\vec{x}]_{\beta_2} = A[\vec{x}]_{\beta_1}} \quad \text{con } A \text{ la matriz de transición de } \beta_1 \text{ a } \beta_2.$$

2.2. Sea A la matriz de transición de β_1 a β_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de β_2 a β_1.

2.3. Sea $\beta_1 = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \cdots,\ \vec{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V.

Suponga que $[\vec{x}_1]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $[\vec{x}_2]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ a_{n2} \end{pmatrix}$, $\cdots$, $[\vec{x}_n]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces el conjunto de $\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \cdots,\ \vec{x}_n\}$ es LI si y sólo si $\det A \neq 0$.

Agradecimientos.

Al **Prof. Jorge Sánchez** por la información (extraída de sus clases) y revisión del material.

A **Santiago Finamore, Asxel Ramírez, Oscar González, Ka Man Fung y Juan Cazaubon**; colaboradores en la elaboración de la guía.

A **José Carlos Contreras** por ayudarme en el proceso de digitalización.

Δ *Última modificación*: 19 de febrero de 2020

Agradecimientos especiales a GECO USB

gecousb.com.ve | @GECOUSB

Autor:

Carlo Miguel Herrera Di Giacinto
18-10451
@cmhd2001 | carlomhd2001@gmail.com